

===== 23.3.9 Grundlagen Bézier-Kurven =====

Die CurveTo-Methode der Klasse Paint verwendet zum Zeichnen → Kapitel 23.3.5.3 'Bézier-Kurven' Bézier-Kurven dritten Grades, die durch 4 Punkte bestimmt werden. Zwei Punkte (A und D) bestimmen den Anfangs- und Endpunkt der Kurve, deren Krümmungsverhalten Sie über die Lage aller 4 Punkte A, B, C und D → Abbildung 23.3.8.1 festlegen. Die Punkte B und C werden Stützpunkte genannt.

BILD 1

Abbildung 23.3.9.1: Bézier-Kurve 3. Grades (4 Punkte)

In diesem Kapitel wird der Versuch unternommen, aus der geometrischen Definition einer Bézier-Kurve 2. Grades – für die es ja in der Klasse Paint keine Methode gibt – eine analytische Beschreibung einer Bézier-Kurve 2. Ordnung zu entwickeln. Damit wird die Erwartung verknüpft, dass Sie die Arbeit mit Bézier-Kurven 3. Grades besser verstehen, weil die Theorie von ähnlichen Ansätzen ausgeht.

Mit den gewonnenen expliziten Parameter-Gleichungen sowie den Methoden der Klasse Paint werden einige Bézier-Kurven 2. Grades gezeichnet.

===== 23.3.9.1 Geometrische Definition einer Bézier-Kurve 2. Grades =====

Gegeben sind drei (verschiedene) Punkte A, B und C in einer (Koordinaten-)Ebene mit einer (normierten) Vektorbasis. Die Punkte A, B und C werden in der gezeigten Art verbunden. Auf den Verbindungslinien AB und BC existieren die beiden Teilungspunkte T1 und T2, auf deren Verbindungslinie T1T2 der Punkt T liegt:

BILD 2

Abbildung 23.3.9.1.1: Bézier-Kurve – Definition 2. Grades (3 Punkte)

Für die drei Teilungspunkte T1, T2 und T gilt folgende Festlegung, die jeweils ihre Lage auf den Verbindungslinien bestimmt:

F0

Für jeden reellen Parameterwert p aus dem Intervall $[0|1]$ ist T ein so genannter Bézier-Punkt. Die Menge aller Punkte $T=T(p)$ ergibt die Bézier-Kurve AC von A nach C mit $T(0) = A$ und $T(1) = C$. Die punktierte grüne Linie besteht aus ausgewählten Punkten der Bézier-Kurve AC.

Zeichnet man für ausgewählte Parameter p die Verbindungslinien der Punkte T_iT_j , dann entsteht dieses Bild:

BILD

Abbildung 23.3.9.1.2: Darstellung von Verbindungslinien T_iT_j

Sie können schon sehr deutlich die Hüllkurve aller Verbindungslinien der Punkte T_iT_j 'sehen'. Der Eindruck wird noch verstärkt, wenn die definierten Bézier-Punkte T auf den Verbindungslinien zusätzlich in rot eingezeichnet werden:

BILD

Abbildung 23.3.9.1.3: Bézier-Punkte

===== 23.3.9.2 Analytische Beschreibung einer Bézier-Kurve 2. Grades =====

Gesucht ist eine analytische Beschreibung für die Koordinaten der Bézier-Punkte $T = T(p)$ für jeden Parameterwert p aus dem Intervall $0 \leq p \leq 1$ auf der Bézier-Kurve von A nach C:

F1

Aus den beiden Vektor-Gleichungen 1 und 2 gewinnt man die Gleichung 4 beziehungsweise 5, wenn man die Gleichungen 1 und 2 in 3 einsetzt:

F2

Aus der Gleichung 5 entstehen die beiden (expliziten) Parameter-Gleichungen 6 und 7 für die Berechnung der x- und y-Koordinate eines Bézier-Punktes der quadratischen Bézier-Kurve (2. Grades) zwischen den Punkten A und C, deren Krümmungsverhalten durch die Lage des Punktes B definiert wird:

F3

===== 23.3.9.3 Beispiele für Bézier-Kurven 2. Grades =====

Beispiel 1

Die Bézier-Kurve AB mit dem Stützpunkt B wird unter Verwendung der Gleichungen 6 und 7 und Methoden der Klasse Paint gezeichnet:

BILD

Abbildung 23.3.9.3.1: Bézier-Kurve AC – B(150|30)

Im folgenden Quelltext werden die Punkte A, B und C über globale Variablen vom Daten-Typ PointF deklariert und die beiden Gleichungen 6 und 7 als Funktionen implementiert:

```
<code gambas>
[1] Public A As PointF
[2] Public B As PointF
[3] Public C As PointF
[4]
[5] Public Sub Form_Open()
[6]     ...
[7]     A = New PointF
[8]     A.x = 30
[9]     A.y = 240
[10]    B = New PointF(150, 30) ' Alternative Angabe der Koordinaten eines Punktes
[11]    C = New PointF(500, 270)
[12]    ...
[13] End ' Form_Open()
[14]
[15] Public Function BézierX(p As Float, AX As Float, BX As Float, CX As Float) As Float
[16] ' Analytische Beschreibung x(p) einer Bézier-Kurve 2. Grades (3 Punkte)
[17] Return (1 - p) * (1 - p) * AX + 2 * (1 - p) * p * BX + p * p * CX
[18] End ' BézierX(..)
[19]
[20] Public Function BézierY(p As Float, AY As Float, BY As Float, CY As Float) As Float
[21] ' Analytische Beschreibung y(p) einer Bézier-Kurve 2. Grades (3 Punkte)
[22] Return (1 - p) * (1 - p) * AY + 2 * (1 - p) * p * BY + p * p * CY
[23] End ' BézierY(..)
</code>
```

Die Prozedur PaintScriptBézier3Points() zum Zeichnen einer Bézier-Kurve 2. Grades nutzt die Prozeduren, die schon in den Projekt-Beispielen im → Kapitel 23.3.3 verwendet wurden:

```
<code gambas>
[1] Public Sub PaintScriptBezier3Points()
[2]     Dim k As Integer
[3]     Dim p As Float
[4]     Dim vP As Vector
[5]
[6]     GenerateNewPicture()
[7]     SetPictureBorder()
[8]     Paint.Begin(hPicture)
[9]     Paint.Translate(xTranslate, yTranslate)
[10]    Paint.Scale(xScale, yScale) ' +y ▲
[11]    DrawCoordinateSystem()
[12]
[13] ' PARABEL-STÜCK
[14] Paint.Brush = Paint.Color(Color.Red)
```

```

[15] Paint.Brush = Paint.Color(Color.Red)
[16] For k = 0 To (C.x - A.x)
[17]     p = k / 470
[18]     Paint.Arc(BézierX(p, A.x, B.x, C.x), BézierY(p, A.y, B.y, C.y), 2)
[19] Next
[20] Paint.Fill()
[21]
[22] ' Verbindungslinien A-B-C
[23] Paint.Brush = Paint.Color(Color.Blue)
[24] Paint.LineWidth = 1
[25] Paint.Dash = [1, 1]
[26] Paint.MoveTo(A.x, A.y)
[27] Paint.LineTo(B.x, B.y)
[28] Paint.LineTo(C.x, C.y)
[29] Paint.Stroke
[30] Paint.Dash = Null
[31]
[32] ' Punkte A, B und C
[33] Paint.Arc(A.x, A.y, 3)
[34] Paint.Arc(B.x, B.y, 3)
[35] Paint.Arc(C.x, C.y, 3)
[36] Paint.Fill
[37]
[38] ' TEXT
[39] Paint.NewPath
[40] Paint.Scale(1, -1) ' +y ▼
[41]     Paint.Font = Font["Monospace, 11"]
[42]     Paint.Brush = Paint.Color(Color.DarkBlue)
[43]     Paint.DrawText("A", 25, -255)
[44]     Paint.DrawText("B", 145, -10)
[45]     Paint.DrawText("C", 495, -285)
[46] Paint.Scale(1, -1) ' +y ▲
[47] Paint.End
[48]
[49] End ' PaintScriptBezier3Points()
</code>

```

Kommentar:

Die Bézier-Kurve wird in den Zeilen 15 bis 20 als Punktfolge gezeichnet. Mit den beiden Funktionen BézierX(..) und BézierY(..) werden die Koordinaten Tx und Ty jedes Bézier-Punktes $T = T(p)$ im Intervall $0 \leq p \leq 1$ berechnet ($T(0) = A$ und $T(1) = C$). Das Parameter-Intervall von $0 \leq p \leq 1$ wird in den Zeilen 16 und 17 für das Zeichnen der Bézier-Punkte auf das Intervall $0 \leq x \leq (C.x - A.x)$ abgebildet. In der Zeile 18 wird ein Bézier-Punkt $T(p)$ mit den Koordinaten Tx und Ty als Kreis mit sehr kleinem Radius gezeichnet. In den weiteren Anweisungen ab Zeile 22 werden die Verbindungslinien AB und BC sowie die Punkte A, B und C gezeichnet. Abschließend werden die drei Punkte noch bezeichnet – jedoch ohne die Angabe von Koordinaten.

Beispiel 2

BILD

Abbildung 23.3.9.3.2: Bézier-Kurve – B(400|60)

Im zweiten Beispiel werden die Koordinaten des Stützpunktes B geändert. Die Koordinaten des Anfangspunktes A und des Endpunktes C bleiben gegenüber dem Beispiel 1 unverändert. Sehr deutlich ist der Einfluss des Punktes B auf den Kurvenverlauf der Bézier-Kurve zu sehen. Im Projekt 'BézierExkurs' können Sie die Koordinaten von B in weiten Grenzen ändern, um die Wirkung der Veränderung sofort zu sehen.

===== Download =====

```

<box 99% round left #F7F9FA #DEE7EC #EEF3F8 #FF0000|Artikel>
\\
{{:11:11.8:k11.8.pdf|Kapitel 11.8 Programmhilfen}}

```

```
\\  
\\  
{{:11:11.8:f1hilfetext.tar.gz|Projekt Programmhilfe1 - Format Text/Plain}}  
\\  
\\  
</box|Download>
```